15/11/19

(X, R)

$R: \sim$

X σύνολο εφοδ. με μια σχ. ισοδ.

$X/R = \{ \kappa\lambda_R(x),\ x \in X \}$

$A \in X/R \Rightarrow \exists x \in X : A = \kappa\lambda_R(x)$ $\qquad xRx \Leftrightarrow x \in \kappa\lambda_R(x)$

Αν θεωρήσουμε $\underline{y \in \kappa\lambda_R(x)} = A$ $\qquad \{y \in X : yRx\}$

$$\Updownarrow$$

$\boxed{yRx} \Rightarrow \kappa\lambda_R(y) = \kappa\lambda_R(x)$

$\kappa\lambda_R(y) = A_y$

(X, R) , $y_1, y_2 \in X$

$y_1 R y_2 \Leftrightarrow \kappa\lambda_R(y_1) = \kappa\lambda_R(y_2)$

<u>ΑΠΟΔ</u>: (...)

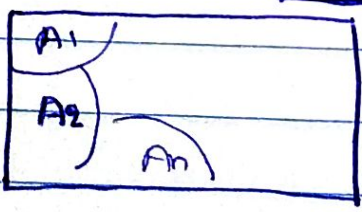
$X/R = \{A_i : i \in I\}$ διαμέριση του X

1. $\kappa\lambda_R(x) \neq 0 \quad \forall x \in X \quad (x \in \kappa\lambda_R(x))$
2. $\bigcup_{x \in X} \kappa\lambda_R(x) \subseteq X$
3. Αν $\kappa\lambda_R(x) \neq \kappa\lambda_R(y) \Rightarrow \kappa\lambda_R(x) \cap \kappa\lambda_R(y) = \emptyset$

R σχ. ισοδυναμίας $\Rightarrow X/R$ διαμέριση του X

$C = \{A_i : i \in I\}$ συλλογή : διαμέριση του $X \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ $\boxed{\text{σχέση ισοδ. } R}$ στο X : $X/R = C \ (= \{A_i : i \in I\})$



X

Να ορίσετε την R στο X

$xRy \iff \exists\ i = i(x,y) : x \in A_i$ κ. $y \in A_i$

$x, y \in X$

Δ.ο. R σχέση ισοδυναμίας

1. xRx . άμεσο αφού το x ανήκει σε μοναδικό A_i
2. $xRy \Rightarrow yRx$
3. xRy , $yRz \Rightarrow xRz$

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in A_i \\ y, z \in A_j \end{array}\right\} \Rightarrow A_i = A_j \Rightarrow xRz$$

R σχ. ισοδυν. δημιουργεί μια διαμέριση

$X/R = C \ (= \{A_i,\ i \in I\})$

1) $\underbrace{X/R}_{\in A} \subseteq \underset{\in A}{C}$

$A \in X/R \Rightarrow A = \kappa\lambda_R(x)$, για κάποιο $x \in X$

$(\ldots)$

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ορίζουμε το $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών

Επαγωγή , αναδρομή , διάταξη καλή , πράξεις

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω x σύνολο , ορίζουμε ένα νέο σύνολο ως

$$x^+ = \underset{\text{σύνολο}}{x} \cup \{\underset{\text{στοιχείο}}{x}\} \quad : \text{αξίωμα ένωσης}$$

$x \in x^+ \supseteq x$

• ΟΡΙΣΜΟΙ (του $\mathbb{N}$):

Θέτουμε $0 = \emptyset$

$$1 = 0^+ = 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$$

$$2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \underbrace{\{\emptyset\}} \cup \{\underbrace{\{\emptyset\}}\} = \{\emptyset, \underbrace{\{\emptyset\}}_{\neq \emptyset}\} = \{0, 1\}$$

$$3 = 2^+ = \{0, 1, 2\}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{n^+}_{n+1} = \{0, 1, \dots, n\}$$

Χρειαζόμαστε ένα αξίωμα που μας εξασφαλίζει ότι αυτό μπορεί να συνεχιστεί μέχρι το ∞

<u>Αξίωμα του απείρου</u>: $\exists A$ σύνολο ώστε $0 = \emptyset \in A$
κ. $\forall x \in A \Rightarrow x^+ \in A$

Ένα τέτοιο σύνολο A ονομάζεται επαγωγικό

<u>Πρόταση</u>: Έστω $C = \{A_i : i \in I\} \neq \emptyset$ από επαγωγικά σύνολα

Τότε $\bigcap C = \bigcap_{i \in I} A_i$ είναι επαγωγικό σύνολο

<u>Αποδ.</u>:

1. $0 = \emptyset \in B$ (καθε A_i επαγωγικό $\Rightarrow \emptyset \in A_i \quad \forall i \in I$
$\Rightarrow \emptyset \in \bigcap_{i \in I} A_i = B$)

2. $x \in B \Rightarrow x^+ \in B$

$x \in B \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Rightarrow x \in A_i, \quad \forall i \in I$
A_i είναι γνήσιο $\Big\} \Rightarrow x^+ \in A_i \quad \forall i$
$\Rightarrow x^+ \in \bigcap_i A_i = B$
$= \bigcap C$

$\Rightarrow \bigcap C$ είναι γνήσιο

ΘΕΩΡΗΜΑ: $\exists$ ακριβώς ένα σύνολο $\boxed{\omega = \mathbb{N}}$, το οποίο είναι επαγωγικό κ είναι υποσύνολο καθε επαγωγικού συνόλου.

ΑΠΟΔ.:

$C = \{A : \underbrace{A \text{ επαγωγικό}}_{\text{σύνολο ?}}\}$ κλάση

Γνωρίζ. ότι $\exists$ ένα (εξ' ορισμού) επαγωγικό σύνολο A_1.

Το σταθεροποιούμε.

$C = \{A \text{ επαγωγικό} : A \subseteq A_1\}$

Πρέπει να εξασφαλίσω ότι C σύνολο

Θέλω να γράψω το C ως $\{x \in B_1 : P(x)\}$ Έτσι εξασφαλ. ότι C σύνολο (αξίωμα προσδιορ.)

$\rightarrow$ $C = \{A \in P(A_1) : \underbrace{A \text{ επαγωγικό}}_{P(A)}\}$

$C = \{A \in \underbrace{P(A_1)}_{\text{αξίωμα δυναμοσυνόλου}} : (\phi \in A) \wedge (\forall x\, [(x \in A) \Rightarrow (x^+ \in A$

x δεσμευμ. μετ.
A ελεύθερη —
ϕ σταθερά

$C \neq \phi$, C σύνολο

$A_1 \in C$ (A_1 επαγωγικό)

Θέτουμε $\omega = \cap C$, που ορίζεται καλά ($C \neq \phi$, C σύνολο)

Δείχνουμε ότι το ω είναι το μοναδικό ελάχιστο $\boxed{\text{επαγωγικό σύνολο}}$

Αρχικά, το ω είναι επαγωγικό, ως τομή επαγωγικών συνόλων.

$\underline{\omega \text{ ελάχιστο}}$: Α.ν.δ.ο. $\forall \Gamma$ επαγωγικό $\Rightarrow \omega \subseteq \Gamma$

Θεωρούμε $\Gamma_1 = \underset{\text{τυχαίο}}{\underline{\Gamma}} \cap A_1$

$\left.\begin{array}{l}\Gamma_1 \text{ επαγωγικό} \\ \Gamma_1 \subseteq A_1 \\ \Gamma_1 \in P(A_1)\end{array}\right\} \Rightarrow \omega \subseteq \Gamma_1$

Δείξαμε ότι το ω είναι ελάχιστο επαγωγικό σύνολο.

Γιατί μοναδικό? $\rightarrow$ Πράγματι, αν ω' ελάχιστο, επαγωγικό σύνολο, θ.δ.ο. $\omega = \omega'$

ω ελάχιστο επαγωγικό $\}\Rightarrow \omega \subseteq \omega'$
ω' επαγωγικό

ω' ελάχιστο επαγωγικό $\}\Rightarrow \omega' \subseteq \omega$
ω επαγωγικό

$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega'}$

Ιδιότητα του συνόλου $\omega = \mathbb{N}$:

1) $0 = \emptyset \in \mathbb{N}$
2) $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{N}$
3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^+ \neq 0$
4) Αρχή της μαθημ. επαγωγής:
Αν $A \subseteq \mathbb{N}$, ώστε $(0 \in A$ κ. $\forall n \in A \Rightarrow n^+ \in A)$
A επαγωγικό
$\Rightarrow A = \mathbb{N}$

Αποδ.
$n^2 + 1 \geq 2n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$A = \{n \in \mathbb{N} : n^2 + 1 \geq 2n\} \subseteq \mathbb{N}$
$0 \in A$
$n \in A \Rightarrow n^+ \in A$
$A = \mathbb{N}$

5) $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n^+ = m^+ \Rightarrow n = m$

Αποδ. 3):
Πρέπει ν.δ.ο. $n^+ \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
$n^+ = n \cup \{n\} \neq \emptyset$
Ζητάμε ν.δ.ο. n^+ περιέχει 1 στοιχείο.
Πράγματι $n \in n^+ \neq \emptyset = 0$

1ο Λήμμα: Αν $x \in n$
n φυσικός αριθμός $(n \in \mathbb{N})$ $\}\Rightarrow x \subseteq n$

Αποδ.:
Ν.ο. $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ιδιότητα $P(n) := \forall x\, (x \in n \Rightarrow x \subseteq n)$
δεσμευμένο
ελεύθερο

→

$A = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\} \subseteq \mathbb{N}$

Αν δ.ο. A επαγωγικό, τότε θα έχουμε ότι $\mathbb{N} \subseteq A \subseteq \mathbb{N}$

$\Rightarrow A = \mathbb{N}$

<u>Α επαγωγικό</u>: 1) $0 \in A$

$A = \{n \in \mathbb{N} : \underbrace{\forall x (x \in n \Rightarrow x \subseteq n)}_{P(0) \text{ αληθής } (?)}\}$

Α.υ.δ.ο. $\forall x \in 0 = \emptyset \Rightarrow x \subseteq \emptyset = 0$

<u>τετριμμένα</u> (ή) με άτοπο:

Αν $0 \notin A$, $P(0)$ ψευδές

$\Rightarrow \exists \underbrace{x \in 0}_{\boxed{\text{ΑΤΟΠΟ}}} : x \not\subseteq 0$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, αν $n \in A \Rightarrow n^+ \in A$

Αφού $n \in A \Rightarrow$ $\boxed{\forall x (\text{αν } x \in n \Rightarrow x \subseteq n) \text{ επαγωγική υπόθεση}}$ (1)

Δ.ο. $n^+ \in A$. Α.υ.δ.ο. $\forall x \in n^+ \Rightarrow x \subseteq n^+$

Έστω τυχαίο $x \in n^+$ (Στόχος $x \subseteq n^+$)

$\Downarrow$

$x \in n \cup \{n\} \Rightarrow \begin{cases} x \in n \\ x \in \{n\} \end{cases}$ | $x \in n$ (2) / $x = n$ (3)

(2) $\rightarrow x \in n \overset{(1)}{\Rightarrow} x \subseteq n \subseteq n^+ \Rightarrow x \subseteq n^+$, στην περίπτ. (2)

(3) $x = n \subseteq \underbrace{n \cup \{n^+\}}_{= n^+} \Rightarrow x \subseteq n^+$

∎

2ο Λήμμα: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \notin n$

Αποδ.:

$A = \{n \in \mathbb{N} : n \notin n\}$

Α.υ.δ.ο. Α επαγωγικό

· $0 \in A$ $(0 \notin 0 = \emptyset)$ άμεσα

· $n \in A \Rightarrow n^+ \in A$

$n \in A$ $(n \notin n) \Rightarrow n^+ \notin n^+$

Έστω ότι $n^+ \in n^+ = n \cup \{n\} \Rightarrow \begin{cases} n^+ \in n & (1) \\ n^+ = n & (2) \end{cases}$

Θα καταλήξουμε σε άτοπο με υποθ. (1) κ (2)

$(1) \Rightarrow$ αφού $\left.\begin{array}{l} n^+ \in n \Rightarrow n^+ \subseteq n \\ n \in \overset{\shortparallel}{n \cup \{n\}} \end{array}\right\} \Rightarrow n \in n$ ΑΤΟΠΟ από επαγ. υπ.

(2) $\underset{\in n}{\overset{n^+}{\underset{n\cup\{n\}}{\shortparallel}}} = n \Rightarrow n \in n$ ΑΤΟΠΟ από επαγ. υποθ.

3ο Λήμμα: $\nexists$ φυσικοί αριθμοί n, m ώστε να ισχύει συγχρόνως $\boxed{n \in m}$ κ $\boxed{m \in n}$

Αποδ.: (Με άτοπο)

Ας υποθ. n, m έχουμε

$\left.\begin{array}{l} (1)\ n \in m \\ (2)\ m \in n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n \subseteq m \\ m \subseteq n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n = m \\ n \in m \end{array}\right\} \Rightarrow n \in n$ ΑΤΟΠΟ

Πρόταση: Αν $n, m \in \mathbb{N}$ ώστε $n^+ = m^+$, τότε $\underline{n = m}$

($n \mapsto n+1$ 1-1)

Απόδ.: (Με άτοπο)

Έστω $n^+ = m^+$, αλλά $n \neq m$

$m^+ = m \cup \{m\}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} n \in n^+ = m^+ = m \cup \{m\} \Rightarrow n \in m \\ n \neq m \end{array}\right\} \Rightarrow n \in m \\ \text{Παρόμοια } m \in n \\ \text{(εναλλάσ. τα } n \text{ κ. } m) \end{array}\right\}$$

Λήμμα 3

$\Rightarrow n = m$ **ΑΤΟΠΟ**